jednostkę i samą linijkę (bez podziałki) oraz cyrkiel. Okazuje się, że choć obliczenie pierwiastków kwadratowych wprowadza liczby niewymierne, cały zbiór nie wykracza daleko poza liczby wymierne. Zbiór liczb euklidesowych, jak je nazywamy, to te cztery działania arytmetyczne i wyciąganie pierwiastków dowolną liczbę razy. Na przykład liczba $\sqrt{7-\sqrt{4/3}}$ jest liczbą tego rodzaju. Nawet pierwiastki trzeciego stopnia są poza zakresem narzędzi euklidesowych. Stało się to podstawą prawdopodobnie pierwszego z trzech wielkich nierozwiązanych problemów matematyki. Chodzi o tak zwany problem delijski: zbudowanie pierwiastka trzeciego stopnia z 2, wykorzystując tylko linijkę i cyrkiel. Legenda mówi, że zadanie zostało zesłane przez boga, gdy obywatele Delos zapytali wyrocznię delficką, co powinni zrobić, aby odsunąć zarazę od Aten – problem został przedstawiony w postaci dokładnego podwojenia objętości ołtarza, który był idealnym sześcianem.

Problem pozostał nierozwiązany w czasach klasycznych. To, że pierwiastek trzeciego stopnia z 2 leży poza zakresem narzędzi euklidesowych, zostało ustalone w 1837 roku przez Pierre'a Wantzela (1814–1848). Wymagało to precyzyjnego algebraicznego opisu, co jest możliwe za pomocą klasycznych narzędzi, aby zobaczyć, że pierwiastek trzeciego stopnia z 2 jest liczbą całkowicie innego rodzaju. Sprowadza się to do pokazania, że nigdy nie możemy stworzyć sześcianu z pierwiastków kwadratowych i liczb wymiernych. Jeśli to sformułujemy w ten sposób, niemożność ta brzmi przyjemniej. Jednak nie jest to w żadnym stopniu dowód.

Transcendentalne

W klasie liczb niewymiernych istnieje tajemnicza rodzina liczb transcendentalnych. Liczby te *nie* powstają w wyniku zwykłych obliczeń arytmetycznych ani wyciągania pierwiastków. Definiując to dokładnie, wprowadzamy najpierw współczesną kolekcję *liczb* *algebraicznych*, które są rozwiązaniami równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, na przykład takim równaniem jest $x^5 - 3x + 1 = 0$. *Liczby transcendentalne* są zdefiniowane jako klasa liczb niealgebraicznych.

Nie ma jasnego dowodu, czy takie liczby istnieją. Jednak naprawdę istnieją i tworzą bardzo tajemniczą społeczność, a te, które się tam znajdują, niechętnie przyznają się do członkostwa w tym klubie. Na przykład liczba π jest transcendentalna, ale nie jest to do razu widoczne. Jest to wyjaśnione w kolejnym rozdziale, gdy badamy naturę zbiorów nieskończonych, dlaczego „większość" liczb jest transcendentalnych w precyzyjnym sensie.

Na razie pozostanę przy wprowadzeniu najsłynniejszej z liczb transcendentalnych, liczby $e = 2{,}71828\ldots$ Liczba ta pojawia się w matematyce wyższej i algebrze: stanowi podstawę tak zwanego logarytmu naturalnego, funkcji, która mówi nam, jaka jest powierzchnia pod wykresem funkcji odwrotnej. Liczba ta jest także granicą szeregu liczb, które otrzymujemy przy podniesieniu ilorazu dwóch kolejnych liczb całkowitych $\frac{n+1}{n}\ (= 1 + \frac{1}{n})$ do potęgi n. (Sprawdźcie na kalkulatorze, jaki jest wynik $(129/128)^{128}$ – możecie wykonać „szybkie potęgowanie", obliczając 129/128, a potem podnosząc do kwadratu 7 razy, gdyż $2^7 = 128$).

Ten ciąg pojawia się, gdy rozpatrujemy problem ograniczania wartości procentów złożonych przy ciągłym zmniejszaniu odcinka wypłaty z rocznego na miesięczny, dzienny i tak dalej. Aby pokazać tę kwestię, rozpatrzmy przypadek wypłaty odsetek z rocznym oprocentowaniem 100%, składając n rat rocznie, co oznacza, że nasze początkowe odsetki są mnożone przez czynnik $(1 + \frac{1}{n})$ n razy w ciągu roku. Podstawa będzie wtedy mnożona przez czynnik $(1 + \frac{1}{n})^n$. Im częściej otrzymujecie wypłatę odsetek, tym więcej będziecie zarabiać, gdyż n staje się coraz większe. Jednak w miarę wzrostu n efektywne oprocentowanie (APR – *Annual Percentage Rate*, roczna stopa oprocentowania) nie zwiększy się poza wszelkie granice, a będzie się zbliżać do górnego ograniczenia, zgodnie z matematycznymi